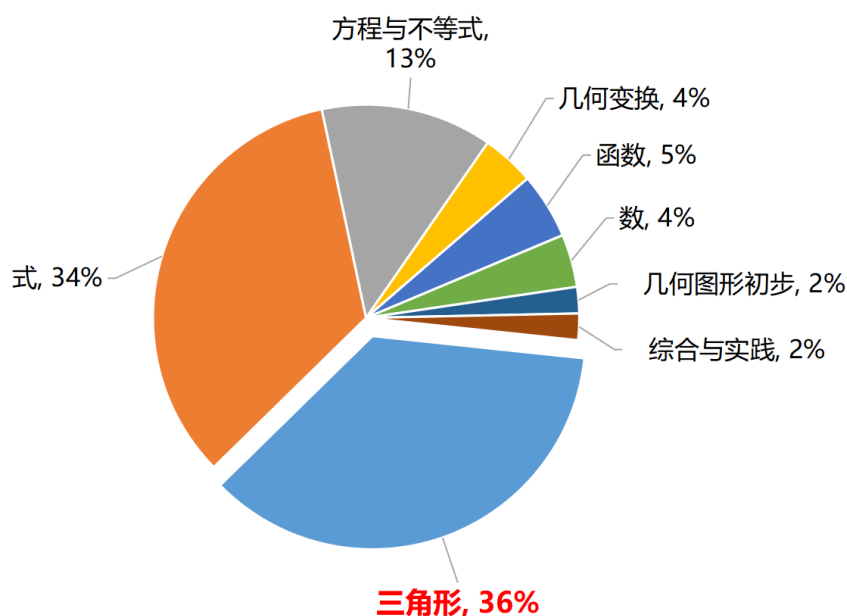


第1讲全等三角形的性质与判定

三角形是所有图形的基础，属于人教版教材第十一、十二、十三章的重点内容，涉及到三角形、全等三角形、轴对称等知识点，体系结构较为完整，同时也是期中、期末考试的重要考察点。本模块《全等三角形初步》，重点包括全等三角形的性质、判定及其综合运用，需要学生在理解概念的基础上，总结一定的解题思路，为后续角平分线，垂直平分线的学习奠定基础。

本模块难度中等，适用于全等三角形的专题学习，本模块分为全等三角形的性质与判定、全等三角形的证明、全等三角形基本辅助线3讲内容，配套练习与讲义内容完全对照，帮助学生巩固薄弱点和易错点。

知己知彼



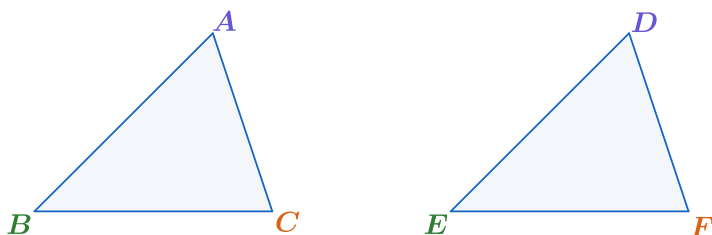
知识点	难度	考频
全等三角形的性质	★★★	高
全等三角形的判定	★★★	高
变换型全等	★★★	中
二次全等	★★★★	高
全等三角形基本辅助线	★★★★	中

一、全等三角形的概念

能够 完全重合 的两个图形就是全等图形．能够 完全重合 的两个三角形叫作全等三角形．

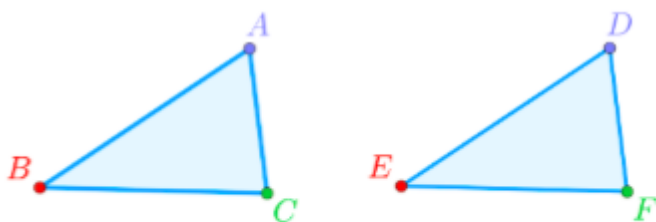
能够相互重合的顶点、边、角分别叫作 对应顶点、对应边、对应角．

全等符号 “ $\cong$ ” 读作 “全等于”．



如图， $\triangle ABC$ 全等于 $\triangle DEF$ ，记作_____

【备注】



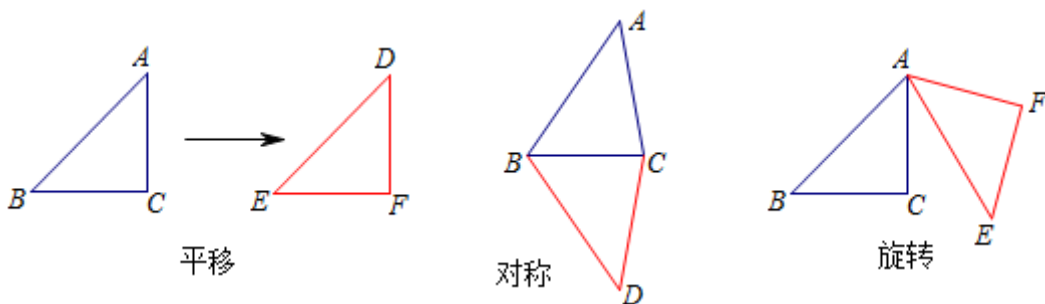
如上图： $\triangle ABC$ 全等于 $\triangle DEF$

记作： $\triangle ABC \cong \triangle DEF$.

【注意】表示两个三角形全等时，通常把表示对应顶点的字母写在对应的位置上．

其中点A与点D，点B与点E，点C与点F是对应顶点，AB和DE，BC和EF，AC和DF是对应边， $\angle A$ 和 $\angle D$ ， $\angle B$ 和 $\angle E$ ， $\angle C$ 和 $\angle F$ 是对应角．

一个三角形经过 平移、翻折、旋转 后，位置变化了，但是形状、大小都没有改变，即 平移、翻折和旋转 前后的图形全等．



🧠 举个“栗”子

栗子1

1. 下列说法：①能够完全重合的图形叫做全等形；

②全等三角形的对应边相等、对应角相等；

③全等三角形的周长相等、面积相等；

④所有的等边三角形都全等；

⑤面积相等的三角形全等．

其中正确的说法有（ ）．

A. 4个

B. 3个

C. 2个

D. 1个

【备注】全等概念的考察

【答案】B

【解析】①中能够完全重合的图形叫做全等形，正确；

②中全等三角形的对应边相等、对应角相等，正确；

③全等三角形的周长相等、面积相等，也正确；

④中所有的等边三角形角都是 60° ，但由于边不相等，所以不能说其全等，④错误；

⑤中面积相等的三角形并不一定是全等三角形，⑤中说法错误；

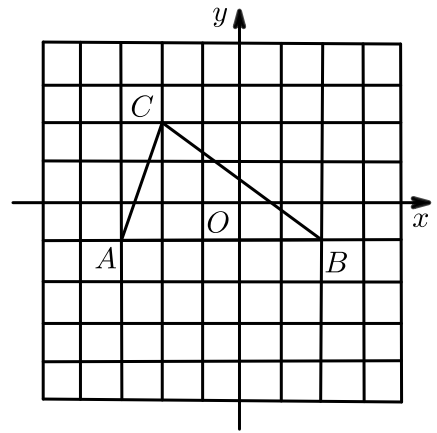
故题中①②③说法正确，④⑤说法错误．

故选B．

【标注】【知识点】全等形的定义

栗子2

2. 数学上把在平面直角坐标系中横纵坐标均为整数的点称为格点，顶点为格点的三角形称为格点三角形，如图，平面直角坐标系中每小方格边长单位1，以 AB 为一边的格点 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 全等（重合除外），则方格中符合条件的点 P 有（ ）．



A. 1个

B. 2个

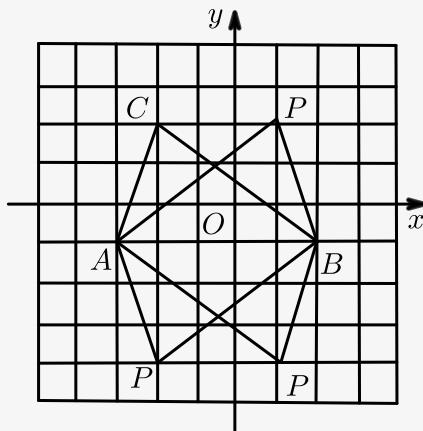
C. 3个

D. 4个

【备注】 与坐标系结合，注意从多个方向考虑，结合对称变换解题

【答案】 C

【解析】 如图所示：平面直角坐标系中每小方格边长单位1，以 AB 为一边的格点 $\triangle ABP$ 与 $\triangle ABC$ 全等（重合除外），则方格中符合条件的点 P 有3个．



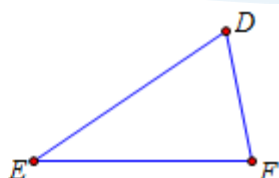
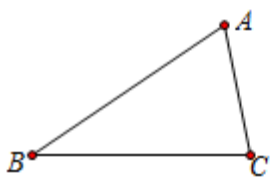
故选C．

【标注】 【知识点】全等三角形存在性

二、全等三角形的性质

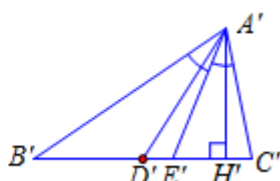
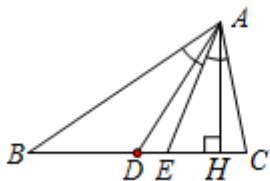
全等三角形的对应边 相等，全等三角形的对应角 相等．

如图 $AB=\underline{DE}$ ， $AC=\underline{DF}$ ， $BC=\underline{EF}$ ， $\angle A=\underline{\angle D}$ ， $\angle B=\underline{\angle E}$ ， $\angle C=\underline{\angle F}$ ．



【拓展】

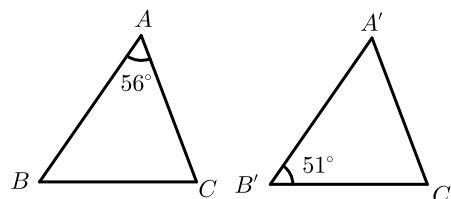
- ① 全等三角形对应边上的 中线 相等，对应边上的 高 相等，对应角的 角平分线 相等。
 ② 全等三角形的 周长 相等，面积 相等。



🧠 举个“栗”子

栗子3

3. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，则 $\angle C$ 的度数是（ ）。



A. 51°

B. 56°

C. 73°

D. 107°

【备注】带学生熟悉对应角的概念，再结合题意进行进一步的计算

【答案】C

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ ，

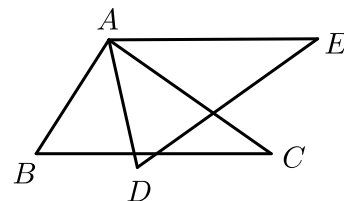
$$\therefore \angle A = \angle A' = 56^\circ, \angle B = \angle B' = 51^\circ,$$

$$\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B = 180^\circ - 56^\circ - 51^\circ = 73^\circ,$$

故选C。

【标注】【知识点】全等三角形的性质

4. 如图， $\triangle ABC \cong \triangle ADE$ ，则 $AB = \underline{\hspace{2cm}}$ ， $\angle E = \underline{\hspace{2cm}}$ 。若 $\angle BAE = 120^\circ$ ， $\angle BAD = 40^\circ$ ，则 $\angle BAC = \underline{\hspace{2cm}}$ 。



【备注】前两个空比较基础，第三个空的核心是 $\angle BAD = \angle CAE$ ，
可以给学生铺垫加减公共角后角度不变的思想

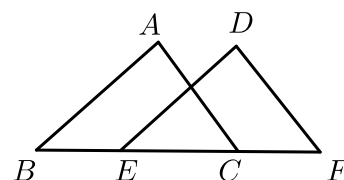
【答案】 AD ; $\angle C$; 80°

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle ADE$,
 $\therefore AB = AD$, $\angle E = \angle C$, $\angle BAC = \angle DAE$,
 $\because \angle DAC$ 是公共角
 $\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC$, 即 $\angle BAD = \angle CAE$,
 已知 $\angle BAE = 120^\circ$, $\angle BAD = 40^\circ$,
 $\therefore \angle CAE = 40^\circ$, $\angle BAC = \angle BAE - \angle CAE = 120^\circ - 40^\circ = 80^\circ$.
 故答案为： AD , $\angle C$, 80° .

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

栗子4

5. 如图 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，点A与D，B与E分别是对应顶点，且测得 $BC = 5\text{cm}$ ， $BF = 7\text{cm}$ ，则
 EC 长为（ ）.



A. 1cm

B. 2cm

C. 3cm

D. 4cm

【备注】利用性质求长度问题，在 $BC = EF$ 的前提下，重点掌握 $BE = CF$

【答案】 C

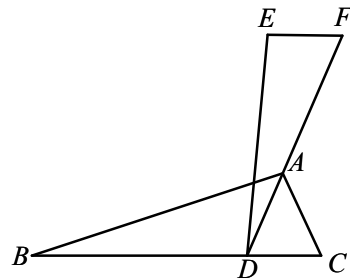
【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$,
 $\therefore EF = BC = 5\text{cm}$,
 $\because BF = 7\text{cm}$, $BC = 5\text{cm}$,
 $\therefore CF = 7\text{cm} - 5\text{cm} = 2\text{cm}$,

$$\therefore EC = EF - CF = 3\text{cm}.$$

故选：C.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

6. 如图，已知 $\triangle ABC \cong \triangle EDF$ ，点 F, A, D 在同一条直线上， AD 是 $\angle BAC$ 的平分线， $\angle EDA = 20^\circ$ ， $\angle F = 60^\circ$ ，则 $\angle DAC$ 的度数是（ ）.



- A. 50° B. 60° C. 100° D. 120°

【备注】利用性质求角度问题，这类题目多与三角形的内角和，外角定理相关

【答案】 A

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle EDF$ ， $\angle EDA = 20^\circ$ ， $\angle F = 60^\circ$ ，

$$\therefore \angle B = \angle EDF = 20^\circ, \angle F = \angle C = 60^\circ,$$

$$\therefore \angle BAC = 180^\circ - \angle B - \angle C = 100^\circ,$$

$\because AD$ 是 $\angle BAC$ 的平分线，

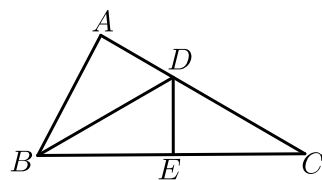
$$\therefore \angle DAC = \frac{1}{2} \angle BAC = 50^\circ,$$

故选A.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

栗子5

7. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， D, E 分别是边 AC, BC 上的点，若 $\triangle ADB \cong \triangle EDB \cong \triangle EDC$ ，则 $\angle C$ 的度数为（ ）.



- A. 15° B. 20° C. 25° D. 30°

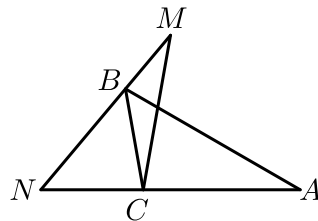
【备注】需要设未知数解题，多个全等的对应角仍相等

【答案】D

【解析】 $\because \triangle ADB \cong \triangle EDB \cong \triangle EDC$,
 $\therefore \angle ADB = \angle EDB = \angle EDC$, $\angle DEC = \angle DEB = \angle A$,
又 $\because \angle ADB + \angle EDB + \angle EDC = 180^\circ$, $\angle DEB + \angle DEC = 180^\circ$.
 $\therefore \angle EDC = 60^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$,
在 $\triangle DEC$ 中 , $\angle EDC = 60^\circ$, $\angle DEC = 90^\circ$,
 $\therefore \angle C = 30^\circ$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

8. 如图 , N, C, A 三点在同一直线上 , 在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle A : \angle ABC : \angle ACB = 3 : 5 : 10$, 又 $\triangle MNC \cong \triangle ABC$, 则 $\angle BCM : \angle BCN$ 等于 () .



A. 1 : 2

B. 1 : 3

C. 2 : 3

D. 1 : 4

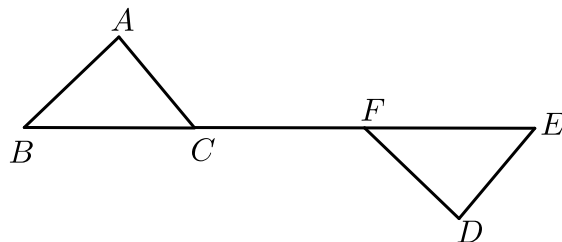
【备注】见比设k，先求出三角形的三个内角，再利用性质推导其他角度

【答案】D

【解析】在 $\triangle ABC$ 中 , $\angle A : \angle ABC : \angle ACB = 3 : 5 : 10$,
设 $\angle A = 3x^\circ$, 则 $\angle ABC = 5x^\circ$, $\angle ACB = 10x^\circ$,
 $3x + 5x + 10x = 180$,
解得 $x = 10$,
则 $\angle A = 30^\circ$, $\angle ABC = 50^\circ$, $\angle ACB = 100^\circ$,
 $\therefore \angle BCN = 180^\circ - 100^\circ = 80^\circ$,
又 $\triangle MNC \cong \triangle ABC$,
 $\therefore \angle ACB = \angle MCN = 100^\circ$,
 $\therefore \angle BCM = \angle NCM - \angle BCN = 100^\circ - 80^\circ = 20^\circ$,
 $\therefore \angle BCM : \angle BCN = 20^\circ : 80^\circ = 1 : 4$.

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

9. 如图，如果 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $\triangle DEF$ 周长是32cm， $DE = 9\text{cm}$ ， $EF = 13\text{cm}$ ，则 $AC =$ _____ cm .



【备注】利用全等三角形的周长相等解题

【答案】10

【解析】 $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ ，

$$\therefore AC = DF,$$

$$\because \triangle DEF \text{ 周长是 } 32\text{cm}, DE = 9\text{cm}, EF = 13\text{cm},$$

$$\therefore DF = 32 - 9 - 13 = 10\text{cm},$$

$$\therefore AC = 10\text{cm}.$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

10. 若 $\triangle ABC \cong \triangle DEF$ ， $AB = DE = 5\text{cm}$ ，若 $\triangle ABC$ 的面积为 10cm^2 ，则 $\triangle DEF$ 的边 DE 上的高为 _____ cm .

【备注】利用全等三角形的面积相等解题

【答案】4

【解析】设 $\triangle ABC$ 边 AB 上的高为 h ，

$$\text{则 } \frac{1}{2} \cdot AB \cdot h = 10, \text{ 即 } \frac{1}{2} \times 5h = 10,$$

$$\text{解得 } h = 4,$$

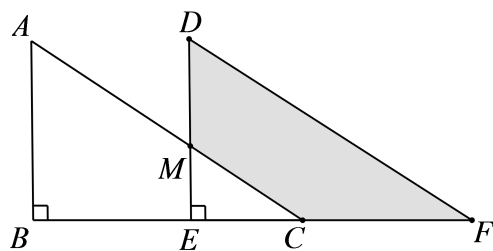
$$\because \triangle ABC \cong \triangle DEF, AB \text{ 与 } DE \text{ 是对应边},$$

$$\therefore DE \text{ 边上的高为 } 4\text{cm}.$$

故答案为：4 .

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

11. 如图，将直角三角形 ABC 沿 BC 方向平移得到直角三角形 DEF ，若 $AB = 8$ ， $BE = 6$ ， $DM = 5$ ，则阴影部分的面积是 _____ .



【备注】面积相等结论的拓展，将阴影部分面积转化成梯形MEBA的面积，再利用公式求解

【答案】 33

【解析】 $\because \triangle ABC$ 沿射线 BC 的方向平移得到 $\triangle DEF$ ，

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF .$$

$\therefore$ 阴影部分的面积=梯形 $ABEM$ 的面积，

$$\therefore \text{阴影部分的面积为: } \frac{1}{2} \times (AB + EM) \times BE = \frac{1}{2} \times (8 + 3) \times 6 = 33 .$$

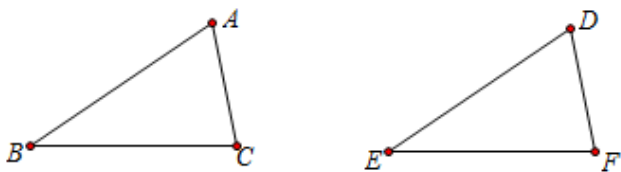
【标注】【知识点】平移作图

三、全等三角形的判定

1. SSS

1. 基本事实：三边 分别 相等 的两个三角形全等。（可以简写成 “边边边” 或 “SSS”）

【书写过程】



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{SSS})$$

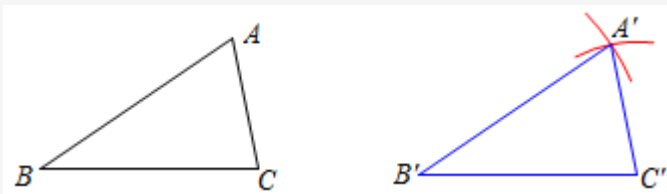
【备注】【探究】先任意画出一个 $\triangle ABC$ ，再画出一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $A'B' = AB$ ， $B'C' = BC$ ， $B'C' = BC$ ， $C'A' = CA$ ， $C'A' = CA$ 。把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

【作图】画一个 $\triangle A'B'C' \cong \triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = ABA'B' = AB$ ， $B'C' = BCB'C' = BC$ ， $C'A' = CAC'A' = CA$ ；

①画 $B'C' = BCB'C' = BC$ ；

②分别以点 $B'B'$ ， $C'C'$ 为圆心，线段 $ABAB$ ， $ACAC$ 长为半径画弧，两弧相交于点 $A'A'$ ；

③连接线段 $A'B'A'B'$ ， $A'C'A'C'$ 。



由三边分别相等判定三角形全等的结论，还可以得到用直尺和圆规作一个角等于已知角的方法。

已知： $\angle AOB$ 。

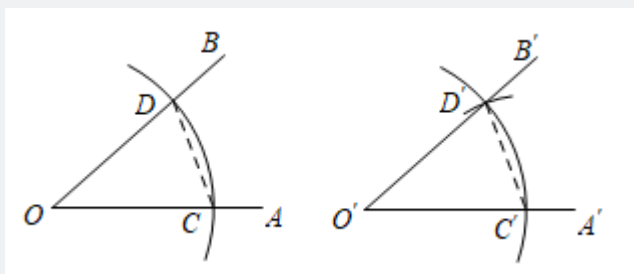
求作： $\angle A'O'B'$ ，使 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 。

作法：（1）如图，以点 O 为圆心，任意长为半径画弧，分别交 OA ， OB 于点 C ， D ；

（2）画一条射线 $O'A'$ ，以点 O' 为圆心， OC 长为半径画弧，交 $O'A'$ 于点 C' ；

（3）以点 C' 为圆心， CD 长为半径画弧，与第（2）步中所画的弧相交于点 D' ；

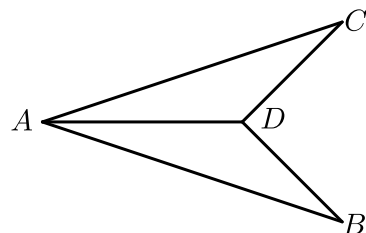
（4）过点 D' 画射线，则 $\angle A'O'B' = \angle AOB$ 。



🍌 举个“栗”子

📊 栗子7

12. 如图， $AB = AC$ ， $BD = DC$ ， $\angle BAC = 36^\circ$ ，则 $\angle BAD$ 为 _____。



【备注】先利用SSS判定出三角形全等，再利用性质求角度

【答案】 18°

【解析】 $\because AB = AC, BD = DC, AD = AD,$

$$\therefore \triangle ABD \cong \triangle ACD,$$

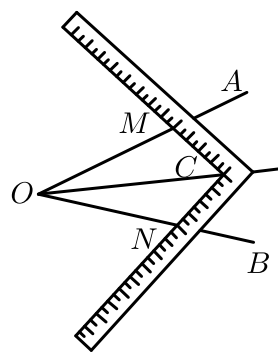
$$\therefore \angle BAD = \angle CAD,$$

$$\therefore \angle BAD = \frac{1}{2} \angle BAC = 18^\circ.$$

故答案为 18° .

【标注】【知识点】SSS

13. 工人师傅常用角尺平分一个任意角. 作法如下: 如图所示, $\angle AOB$ 是一个任意角, 在边 OA, OB 上分别取 $OM = ON$, 移动角尺, 使角尺两边相同的刻度分别与 M, N 重合, 过角尺顶点 C 的射线 OC 即是 $\angle AOB$ 的平分线. 这种作法的道理是 ().



A. HL

B. SSS

C. SAS

D. ASA

【备注】做法依据问题, 这类题目需要学生去分析题目中工具所带的已知条件, 如本题中“使角尺两边相同的刻度”可以转化为 $MC = NC$

【答案】B

【解析】在 $\triangle OCM$ 和 $\triangle OCN$ 中,

$$\begin{cases} OM = ON \text{ (已知)} \\ OC = OC \text{ (公共边)} \\ CM = CN \text{ (已知)} \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OCM \cong \triangle OCN (\text{SSS}),$$

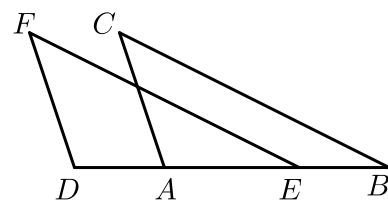
$$\therefore \angle AOC = \angle BOC,$$

即 OC 即是 $\angle AOB$ 的平分线.

故选 B.

【标注】【知识点】作图依据

14. 如图, 点 A, E 在线段 DB 上, $DA = EB, DF = AC, EF = BC$. 求证 $\angle C = \angle F$.



【备注】需要学生熟练书写SSS的推导过程，练习册中也有对应的补充题目

【答案】证明见解析。

【解析】 $\because DA = EB$,

$$\therefore DA + AE = EB + AE,$$

$$\text{即 } DE = AB,$$

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF,$$

$$\therefore \angle C = \angle F.$$

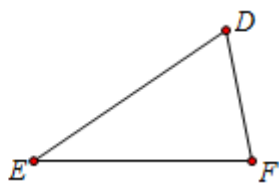
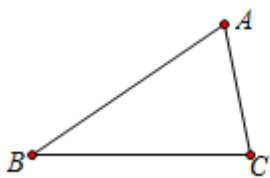
【标注】【知识点】SSS

2. SAS

2. 基本事实：两边和它们的夹角分别相等的两个三角形全等

(可以简写成“边角边”或“SAS”)。

【书写过程】



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle B = \angle E \\ BC = EF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{SAS})$$

【思考】已知两边及其一边的对角对应相等，能否判定两个三角形全等？

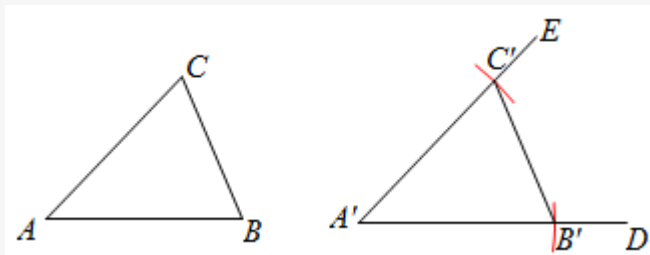
【备注】【探究】先任意画出一个 $\triangle ABC$ ，再画出一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $A'C' = AC$ ， $\angle A' = \angle A$ 。把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

【作图】画一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $A'C' = AC$ ， $\angle A' = \angle A$ ：

①画 $\angle DA'E = \angle A$ ；

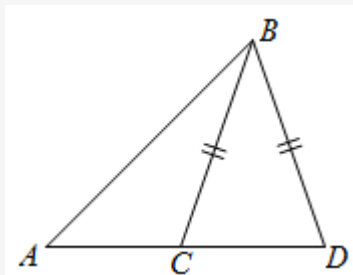
②在射线 $A'D$ 上截取 $A'B' = AB$ ，在射线 $A'E$ 上截取 $A'C' = AC$ ；

③连接 $B'C'$ 。



【注意】已知两边及其中一边的对角对应相等时，不能判定两个三角形全等。

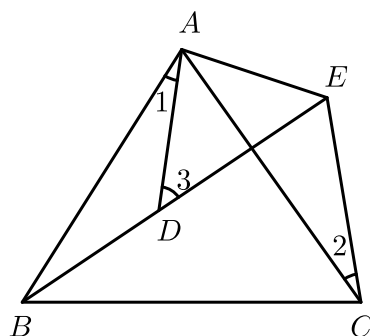
如图： $\angle A = 45^\circ$ ， $AB = 4\text{cm}$ ， $BC = BD = 3\text{cm}$ ， $\triangle ABC$ 与 $\triangle ABD$ 明显不全等，



🍌 举个“栗”子

栗子8

15. 如图， $AB = AC$ ， $AD = AE$ ， $\angle BAC = \angle DAE$ ， $\angle 1 = 24^\circ$ ， $\angle 2 = 30^\circ$ ，则 $\angle 3 = \underline{\quad}^\circ$ 。



【备注】先利用SAS判定出三角形全等，再利用性质求角度,利用外角解题会更快

【答案】 54

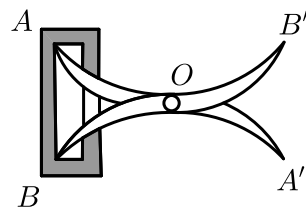
【解析】 $\because \angle BAC = \angle DAE$,

$$\therefore \angle BAC - \angle DAC = \angle DAE - \angle DAC,$$

$$\begin{aligned}
 &\therefore \angle BAD = \angle CAE, \\
 &\therefore \text{在} \triangle BAD \text{和} \triangle CAE \text{中}, \\
 &\quad \begin{cases} AB = AC \\ \angle BAD = \angle CAE \\ AD = AE \end{cases} \\
 &\therefore \triangle BAD \cong \triangle CAE, \\
 &\therefore \angle ABD = \angle 2, \\
 &\therefore \angle 2 = 30^\circ, \\
 &\therefore \angle ABD = 30^\circ, \\
 &\therefore \angle 3 = \angle 1 + \angle ABD, \angle 1 = 24^\circ, \\
 &\therefore \angle 3 = 24^\circ + 30^\circ = 54^\circ.
 \end{aligned}$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角
【知识点】SAS

16. 如图，将两根钢条 AA' 、 BB' 的中点 O 连在一起，使 AA' 、 BB' 可以绕着点 O 自由转动，就做成了一个测量工件，由三角形全等得出 $A'B'$ 的长等于内槽宽 AB ；那么判定 $\triangle OAB \cong \triangle OA'B'$ 的理由是（ ）。



- A. 边角边 B. 角边角 C. 边边边 D. 角角边

【备注】做法依据问题，本题关键点为题目中的“中点”

【答案】A

【解析】 $\triangle OAB$ 与 $\triangle OA'B'$ 中，

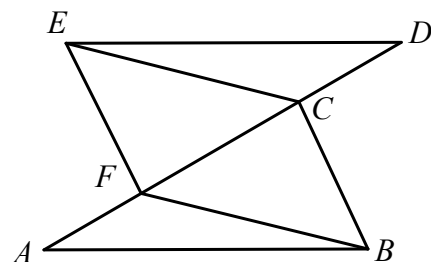
$$\therefore \begin{cases} AO = A'O \\ \angle AOB = \angle A'OB' \\ BO = B'O \end{cases}$$

$$\therefore \triangle OAB \cong \triangle OA'B' \text{ (SAS)}.$$
 故选A.

【标注】【知识点】全等三角形实际生活中的应用

17. 已知：如图， A 、 F 、 C 、 D 四点在同一直线上， $AF = CD$ ， $AB \parallel DE$ ，且 $AB = DE$ 。

求证：



$$(1) \triangle ABC \cong \triangle DEF$$

$$(2) \angle CBF = \angle FEC$$

【备注】 需要学生熟练书写SAS的推导过程，两问均利用SAS证明

【答案】 (1) 证明见解析

(2) 证明见解析.

【解析】 (1) $\because AF = CD$,

$$\therefore AF + FC = CD + FC, \text{ 即 } AC = DF.$$

$$\because AB \parallel DE,$$

$$\therefore \angle A = \angle D,$$

$$\because AB = DE,$$

$\therefore$ 在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中,

$$\begin{cases} AB = DE \\ \angle A = \angle D \\ AC = DF \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (\text{SAS}).$$

(2) $\because \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (已证),

$$\therefore BC = EF, \angle ACB = \angle DFE.$$

在 $\triangle BCF$ 和 $\triangle EFC$ 中,

$$\begin{cases} BC = EF \\ \angle ACB = \angle DFE \\ FC = FC \end{cases}$$

$$\therefore \triangle BCF \cong \triangle EFC (\text{SAS}).$$

$$\therefore \angle CBF = \angle FEC$$

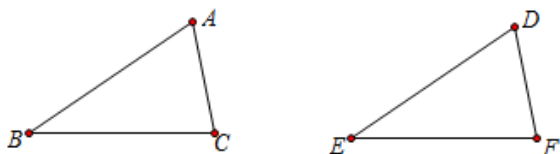
【标注】 【知识点】全等三角形的对应边与角

3. ASA

3. 基本事实：两角 和它们的 夹边 分别相等的两个三角形全等

(可以简写成“**角边角**”或“**ASA**”)。

【书写过程】



在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ BC = EF \\ \angle C = \angle F \end{cases}$$

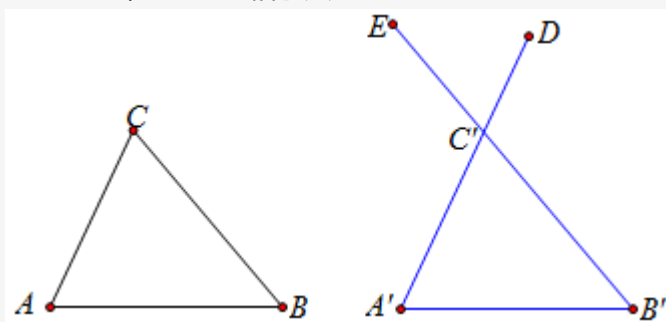
$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF (ASA)$

【备注】【探究】先任意画出一个 $\triangle ABC$ 。再画出一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $\angle A' = \angle A$ ， $\angle B' = \angle B$ 。把画好的 $\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

【作图】画一个 $\triangle A'B'C'$ ，使 $A'B' = AB$ ， $\angle A' = \angle A$ ， $\angle B' = \angle B$ ：

①画 $A'B' = AB$ ；

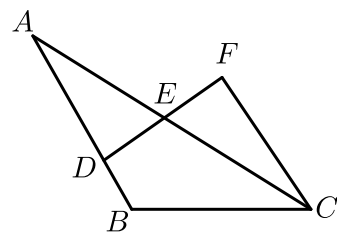
②在 $A'B'$ 的同旁画 $\angle DA'B' = \angle A$ ， $\angle EB'A' = \angle B$ ， DA' ， EB' 相交于点 C' 。



🔗 举个“栗”子

栗子9

18. 如图， $AB \parallel CF$ ， E 为 DF 的中点， $AB = 10$ ， $CF = 6$ ，则 $BD = \underline{\quad}$ 。



【备注】先利用ASA判定出三角形全等，再利用性质求长度

【答案】 4

【解析】 $\because AB \parallel CF$,

$$\therefore \angle ADE = \angle EFC,$$

$\because E$ 为 DF 的中点,

$$\therefore DE = EF,$$

在 $\triangle ADE$ 与 $\triangle CFE$ 中

$$\begin{cases} \angle ADE = \angle EFC \\ DE = EF \\ \angle AED = \angle CEF \end{cases},$$

$$\therefore \triangle ADE \cong \triangle CFE,$$

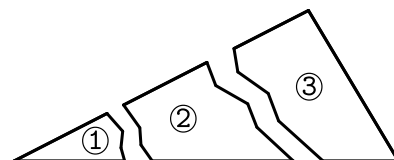
$$\therefore AD = CF,$$

$$\because AB = 10, CF = 6,$$

$$\therefore BD = AB - AD = 10 - 6 = 4.$$

【标注】【知识点】ASA

19. 如图,某同学把一块三角形的玻璃打碎成三片,现在他要到玻璃店去配一块完全一样形状的玻璃. 那么最省事的办法是带 _____ 去配,这样做的数学依据是 _____ .



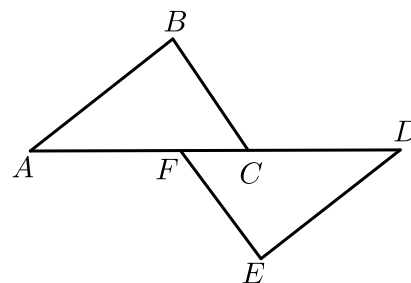
【备注】碎片问题, ③中两角一边均已知, 可用于判定全等

【答案】③; 两角及夹边分别对应相等的两个三角形全等

【解析】③保留了三角形的两个角及一条边, 由ASA可确定三角形的完整形状, 即两角及夹边分别对应相等的两个三角形全等.

【标注】【知识点】ASA

20. 如图, 点 A 、 F 、 C 、 D 在同一条直线上, 已知 $AF = DC$, $\angle A = \angle D$, $BC \parallel EF$, 求证:
 $AB = DE$.



【备注】规范学生的书写过程，因为平行得到的内错角相等一定要体现出过程

【答案】证明见解析．

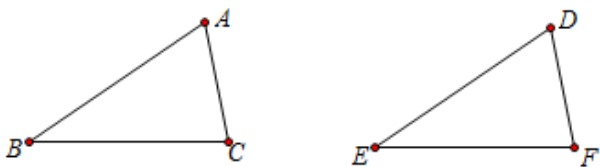
【解析】 $\because AF = CD$,
 $\therefore AC = DF$,
 $\because BC \parallel EF$,
 $\therefore \angle ACB = \angle DFE$,
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中 ,
$$\begin{cases} \angle A = \angle D \\ AC = DF \\ \angle ACB = \angle DFE \end{cases}$$
 ,
 $\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA) ,
 $\therefore AB = DE$.

【标注】【知识点】ASA

4. AAS

4. 推论：两个角和其中一角的对边对应相等的两个三角形全等
(可以简写成“角角边”或“AAS”)。

【书写过程】



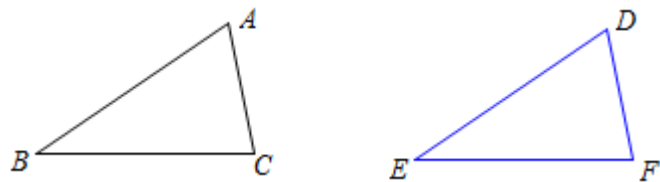
在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ \angle C = \angle F \\ AC = DF \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle DEF$ (AAS)

【备注】【探究】

如图，在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中， $\angle A = \angle D$ ， $\angle B = \angle E$ ， $BC = EF$ ，那么 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 全等吗？能利用边角边条件证明你的结论吗？



证明：在 $\triangle ABC$ 中， $\angle A + \angle B + \angle C = 180^\circ$,
 $\therefore \angle C = 180^\circ - \angle A - \angle B$.

同理 $\angle F = 180^\circ - \angle D - \angle E$.

$\therefore \angle A = \angle D$, $\angle B = \angle E$,

$\therefore \angle C = \angle F$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 中

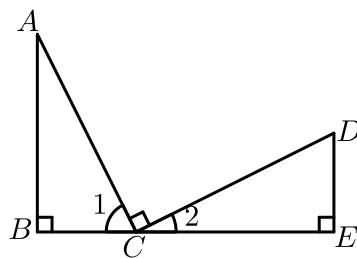
$$\begin{cases} \angle B = \angle E \\ BC = EF \\ \angle C = \angle F \end{cases}$$

$\triangle ABC \cong \triangle DEF$ (ASA) .

🔔 举个“栗”子

栗子10

21. 已知：如图， $AC = CD$ ， $\angle B = \angle E = 90^\circ$ ， $AC \perp CD$ ， B 、 C 、 E 在同一条直线上，则不正确的结论是（ ）.



A. $\angle A$ 与 $\angle D$ 互为余角 B. $\angle A = \angle 2$

C. $\triangle ABC \cong \triangle CED$ D. $\angle 1 = \angle 2$

【备注】 利用AAS去判定全等，再利用其性质解题

这部分可以根据学生程度，铺垫一下一线三垂直模型

【答案】 D

【解析】 $\because AC \perp CD$,

$\therefore \angle 1 + \angle 2 = 90^\circ$,

$\because \angle B = 90^\circ$,

$\therefore \angle 1 + \angle A = 90^\circ$,

$\therefore \angle A = \angle 2$,

在 $\triangle ABC$ 和 $\triangle CED$ 中 ,

$$\begin{cases} \angle B = \angle E = 90^\circ \\ \angle A = \angle 2 \\ AC = CD \end{cases} ,$$

$\therefore \triangle ABC \cong \triangle CED$ (AAS) ,

故B、C选项正确；

$\therefore \angle 2 + \angle D = 90^\circ$,

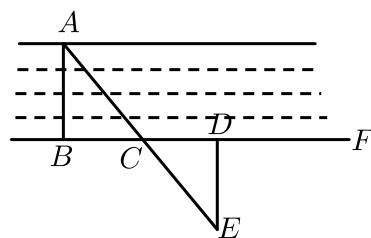
$$\therefore \angle A + \angle D = 90^\circ,$$

故A选项正确.

故选：D.

【标注】【知识点】三垂直模型

22. 要测量河两岸相对的两点A、B的距离，先在AB的垂线上取两点C、D，使 $BC = CD$ ，再作出BF的垂线DE，使E与A、C在一条直线上（如图所示），可以说明 $\triangle EDC \cong \triangle ABC$ ，得 $ED = AB$ ，因此测得ED的长就是AB的长，判定 $\triangle EDC \cong \triangle ABC$ 最恰当的理由是（ ）.



- A. 边角边 B. 角边角 C. 边边边 D. 边边角

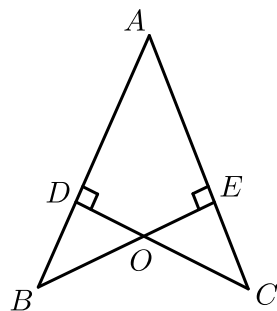
【备注】依据问题，本题关键为垂线可以推导为角度相等，再结合对顶角相等即可

【答案】B

【解析】因为证明在 $\triangle EDC \cong \triangle ABC$ 用到的条件是： $CD = BC$ ， $\angle ABC = \angle EDC$ ， $\angle ACB = \angle ECD$ ，
所以用到的是两角及这两角的夹边对应相等即角边角这一方法.

【标注】【知识点】AAS

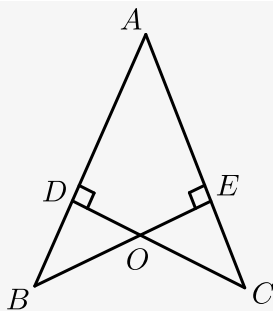
23. 如图， $AB = AC$ ， $CD \perp AB$ 于D， $BE \perp AC$ 于E，BE与CD相交于点O，求证： $AD = AE$.



【备注】规范学生的书写过程，注意到题目中 $\angle A$ 为公共角，可直接用

【答案】证明见解析.

【解析】 $\because CD \perp AB$ ， $BE \perp AC$ ，



$$\therefore \angle ADC = \angle AEB = 90^\circ,$$

在 $\triangle ADC$ 和 $\triangle AEB$ 中,

$$\begin{cases} \angle A = \angle A \\ \angle ADC = \angle AEB, \\ AC = AB \end{cases}$$

$$\therefore \triangle ADC \cong \triangle AEB,$$

$$\therefore AD = AE.$$

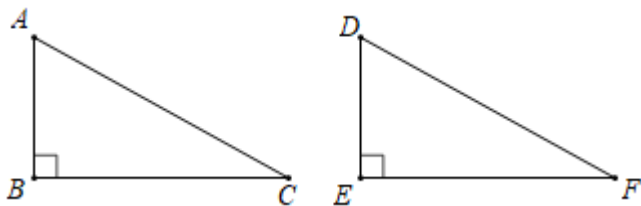
【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角

5. HL

5. 定理：斜边 和一条 直角边 分别相等的两个直角三角形全等。

(可以简写成 “斜边、直角边” 或 “HL”)

【书写过程】



在 $\text{Rt}\triangle ABC$ 和 $\text{Rt}\triangle DEF$ 中

$$\begin{cases} AC = DF \\ AB = DE \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle ABC \cong \text{Rt}\triangle DEF (\text{HL})$$

【备注】【探究】任意画出一个 $\text{Rt}\triangle ABC$ ，使 $\angle C = 90^\circ$ ，再画一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ ，使 $\angle C' = 90^\circ$ ， $B'C' = BC$ ， $A'B' = AB$ 。把画好的 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ 剪下来，放到 $\text{Rt}\triangle ABC$ 上，它们全等吗？

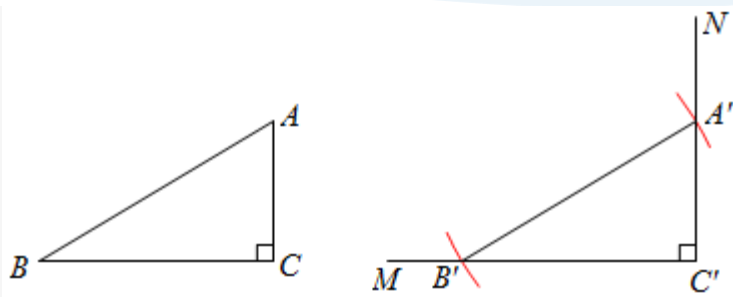
【作图】画一个 $\text{Rt}\triangle A'B'C'$ ，使 $\angle C' = 90^\circ$ ， $B'C' = BC$ ， $A'B' = AB$ ：

①画 $\angle MC'N = 90^\circ$ ；

②在射线 $C'M$ 上截取 $B'C' = BC$ ；

③以点 B' 为圆心， AB 为半径画弧，交射线 $C'N$ 于点 A' ；

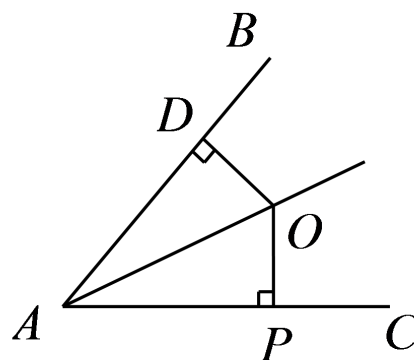
④连接 $A'B'$ 。



👤 举个“栗”子

栗子11

24. 如图， $OD \perp AB$ 于点 D ， $PO \perp AC$ 于点 P ，且 $OD = OP$ ，则 $\triangle AOD$ 与 $\triangle AOP$ 全等的理由是（ ）。



A. SSS

B. SAS

C. ASA

D. HL

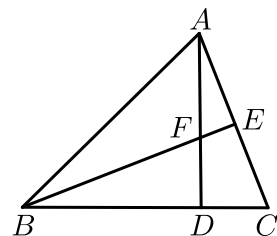
【备注】直接利用HL判定全等，题目中AO为公共边

【答案】D

【解析】由条件可知： $\angle ODA = \angle OPA = 90^\circ$ ， $OD = OP$ ， $OA = OA$ 。故 $\triangle AOD \cong \triangle AOP$ 理由是HL。

【标注】【知识点】HL

25. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， $AD \perp BC$ 于点 D ， F 是 AD 上一点，延长 BF 交 AC 于点 E ，若 $BF = AC$ ， $DF = DC$ ，则 $\angle BEC$ 的大小是 _____。



【备注】先判定全等，再利用垂直推导互余的关系，
可以给学生铺垫一下双垂直模型

【答案】 90°

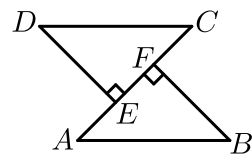
【解析】 $\because AD \perp BC$,
 $\therefore \angle BDF = 90^\circ$, $\angle ADC = 90^\circ$,
 在 $\text{Rt}\triangle ADC$ 和 $\text{Rt}\triangle BDF$ 中 ,

$$\begin{cases} BF = AC \\ DF = DC \end{cases}$$

 $\therefore \text{Rt}\triangle ADC \cong \text{Rt}\triangle BDF (\text{HL})$,
 $\therefore \angle DAC = \angle DBF$,
 又 $\because$ 在 $\triangle BDF$ 和 $\triangle AEF$ 中 ,
 $\angle AFE = \angle BFD$,
 $\therefore \angle BDF = \angle AEF = 90^\circ$,
 $\therefore \angle BEC = 180^\circ - \angle AEF = 90^\circ$.

【标注】【知识点】HL

26. 如图 , $AB = CD$, $DE \perp AC$, $BF \perp AC$, E, F 是垂足 , $DE = BF$. 求证 : $AB \parallel CD$.



【备注】注意利用HL时必须先证明出直角三角形，注意到书写上的细节

【答案】 证明见解析 .

【解析】 $\because DE \perp AC$, $BF \perp AC$,
 $\therefore \angle DEC = \angle AFB = 90^\circ$,
 $\because$ 在 $\text{Rt}\triangle DEC$ 和 $\text{Rt}\triangle BFA$ 中 ,

$$\begin{cases} DE = BF \\ AB = CD \end{cases}$$

$$\therefore \text{Rt}\triangle DEC \cong \text{Rt}\triangle BFA (\text{HL}) ,$$

$$\therefore \angle C = \angle A ,$$

$$\therefore AB \parallel CD .$$

【标注】【知识点】全等三角形的对应边与角